VÝZNAM

Algebraický výraz se zavádí intuitivně – bez přesnějšího vymezení a v kolizi s názvy dvojčlen, trojčlen, mnohočlen. Stále se udržuje falešná představa, že čísla označují množství, že jsou zobecněním vnímané skutečnosti. Představa, které se pejorativně říká *kupecké počty*.

Potíž s matematikou tkví v tom, že žáci nevědí, že čísla žádné množství neoznačují, ale že jsou to ***symboly ve hře se zcela přesnými pravidly***, a i když se čísla dají použít k označení množství či délky či úhlu, je to sice velmi užitečné, ale pro hru zvanou matematika zcela nepodstatné. Upřesnění významu slova *VÝRAZ* má pomoci v lepším vhledu do logiky matematiky.

***ALGEBRAICKÝ VÝRAZ* je předpis jedné nebo více matematických operací.**

OPAKOVÁNÍ

Je výrazem $a \cdot \frac{m^2}{x+y}$?

ANO! Je to předpis, který obsahuje blíže neurčené znaky (*a; m; x; y* – nevíme zda jsou to konstanty či proměnné a neznáme jejich hodnotu) a operátory násobení, umocňování, dělení (co je operátorem dělení v daném příkladu?) a sčítání.

PŘÍKLADY

a) 3 (není, neobsahuje operátor) b) $3 + a$ c) $\frac{x}{3}$ d) $1 - 2$

e) $a \cdot \frac{b}{c}$ f) abx g) $5c$ h) $5.3 - b$

> Proč jednou píšeme operátor násobení ($a \cdot \frac{b}{c}$) a podruhé jej nepíšeme (*abx*)?
>
> Operátor násobení píšeme jenom
>
> - Tam, kde je to nezbytně nutné (*např.* $3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ *na rozdíl od* $3\frac{1}{2} = \frac{7}{2}$)
> - Pro větší přehlednost

!

i) $a(x^3 - 1)$ j) $x^2 - 1 = 8$ (není, to je už rovnice; srovnání matematického výrazu na jedné straně s hodnotou znaku na druhé straně)

k) $\frac{3}{4}$ l) b^5 m) $\sqrt{x}$ n) x (není, neobsahuje operátor) o) $a \le 1$ (není, je to nerovnice; srovnávání hodnot znaků)

Matematika vás nemá naučit počítat,
matematika vás má naučit pravidlům
a jejich používání!

ZAPIŠTE JAKO VÝRAZ

1) součet dvojnásobku znaku x a čísla 5……………..... $2x + 5$
2) dvojnásobek součtu znaku x a čísla 5………………. $2(x + 5)$
3) druhou mocninu rozdílu znaků m a n………………. $(m - n)^2$
4) rozdíl druhých mocnin znaků m a n………………... $m^2 - n^2$
5) součin výrazů 2r a 7s zmenšený o jejich rozdíl……. $14rs - (2r - 7s)$ nebo také $14rs - 2r + 7s$
6) rozdíl výrazů 2r a 7s (v tomto pořadí) zvětšený o jejich součet $4r$
7) Ve třídě je d dívek a chlapců je o 3 méně než dívek. Zapiš výrazem počet žáků! $2d - 3$
8) Sada šesti výrobků stojí v Kč. Jakou částku stojí 5 výrobků? $\frac{5}{6}v$
9) Rychlík jede průměrnou rychlostí b kilometrů za hodinu. Jakou dráhu ujede za 17 minut? $\frac{17b}{60}$
10) Auto ujelo za 3 hodiny a km. Kolik kilometrů ujede auto stejnou rychlostí za 4 hodiny? $\frac{4a}{3}$

Známe ***číselné výrazy*** např. $3^2 - 1$; $4 - \frac{\pi}{2}$, ***výrazy s proměnnou*** např. $5 - \frac{1}{x-1}$ a je-li proměnná ve zlomku (jako v daném příkladu) jde o ***lomený výraz***.
Proměnnou ve výrazu rozumíme ***znak***, který označuje libovolné číslo z určité množiny, kterou nazýváme ***obor proměnné*** nebo ***definiční obor výrazu***. Pokud není obor proměnné výslovně určen, považujeme za obor proměnné množinu všech čísel, která lze do výrazu dosadit, aniž ztratí smysl některá z uvedených operací (nedochází např. k dělení nulou, odmocňování záporného čísla apod.). Říkáme, že ***pro hodnoty z definičního oboru má výraz smysl***. Dosadíme-li za proměnné do výrazu libovolná čísla, pro která má daný výraz smysl, a provedeme všechny předepsané operace, dostaneme jako výsledek číslo – ***hodnotu výrazu***.

Příklady

Vyhodnoť, který příklad je výrazem a uveď množinu, ve které má smysl

1) $a + 1$ 2) $a - 1$ 3) $\frac{a}{3}$ 4) $\sqrt{a}$

5) 4  + 3  6) $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}$ 7) π 8) πr^2

9)  +  10)  11) $\frac{1}{a-1}$ 12) $\frac{1}{3}a^2$

1) Je výrazem a má smysl: v množině přirozených čísel N, v množině celých čísel Z, v množině racionálních čísel Q a v množině reálných čísel R

2) Je výrazem a má smysl: v množině celých čísel Z, v množině racionálních čísel Q a v množině reálných čísel R. *V množině přirozených čísel* N *smysl nemá, protože v bodu a = 1 je hodnota výrazu rovná nule a nula do množiny přirozených čísel nepatří.*

3) Je výrazem a má smysl: v množině racionálních čísel Q a v množině reálných čísel R.

4) Je výrazem a má smysl: v množině kladných reálných čísel R^+ $\{a \in R; a \geq 0\}$.

5) Je výrazem a má smysl: v množině ovoce (plodů atd.)

6) Je výrazem a má smysl: v množině reálných čísel $\mathbb{R}-\{0\}$ (čteno: *v množině reálných čísel mimo bodu r* = 0).

7) Není výrazem.

8) Je výrazem a má smysl: v množině přirozených čísel $\mathbb{N}$, v množině celých čísel $\mathbb{Z}$, v množině racionálních čísel $\mathbb{Q}$ a v množině reálných čísel $\mathbb{R}$

9) Je výrazem a má smysl: v množině domácích zvířat

10) Není výrazem

11) Je výrazem a má smysl v množině racionálních čísel $\mathbb{Q}-\{1\}$ a v množině reálných čísel $\mathbb{R}-\{1\}$ (čteno: *v množině reálných čísel mimo bodu jedna*)

12) Je výrazem a má smysl: v množině racionálních čísel $\mathbb{Q}$ a v množině reálných čísel $\mathbb{R}$.

Udejte, kdy mají smysl následující výrazy:

a) $\frac{2-x}{2x}$ $(x\neq 0)$ b) $\frac{3}{4x^2}$ $(x\neq 0)$ c) $\frac{1}{x-1}$ $(x\neq 1)$

d) $\frac{x+2}{(x-2)(x-3)}$ $(x\neq 2, x\neq 3)$ e) $\frac{4}{x^2+1}$ (v množině $\mathbb{R}$ vždy)

f) $\sqrt{x-7}$ $(x\geq 7)$ g) $\sqrt{x^2+3}$ (v množině $\mathbb{R}$ vždy)

Tedy definičními obory výrazů jsou: a) $\mathbb{R}-\{0\}$, b) $\mathbb{R}-\{0\}$, c) $\mathbb{R}-\{1\}$, d) $\mathbb{R}-\{2;3\}$, e) $\mathbb{R}$, f) $\{x\in\mathbb{R}; x\geq 7\}$, g) $\mathbb{R}$

Hodnota výrazu

1) Určete hodnotu výrazu:

a) $\frac{5x-x^2}{7}$ pro x = – 2 a pro x = 3 — –2; $\frac{6}{7}$

b) $\frac{-6-x}{2}$ pro x = – 2 a pro x = 3 — –2; $-\frac{9}{2}$

c) $(3x-2)x$ pro x = 0; 0,5; 1; 2; –3 — 0; –0,25; 1; 8; 33

d) $\frac{2x-1}{3}-\frac{4-x}{2}$ pro x = 4; 0; 1; –2; $\frac{1}{2}$ — $\frac{7}{3}$; $-2\frac{1}{3}$; $-\frac{7}{6}$; $-3\frac{5}{3}$; $-\frac{7}{4}$

e) $5(2x-3)+4(x^2-9)$ pro x = 3; –1; –3; $\frac{1}{2}$ — 15; –57; –45; –45

f) $3(2-3x)-4(1-x^2)$ pro x = 3; –2; –1; $-\frac{1}{2}$ — 11; 36; 15; $5\frac{1}{2}$

2) Zjednodušte výraz $2x^2+3x-x^2-6x+3-x^2+5$ a správnost výrazu ověřte dosazením x = –2 do daného i upraveného výrazu. $(-3x+8;\quad 14)$

Výraz $2x^2+3x-x^2-6x+3-x^2+5$ už patří do zvláštní kategorie výrazů, kterým se říká ***mnohočleny***. Mnohočlen s jednou proměnnou je výraz tvaru např. $ax^4 - bx^3 + cx - 5$; kde *a*, *b*, *c* jsou ***koeficienty*** mnohočlenu a ***x*** je ***proměnná***. Výrazy ax^4, bx^3, cx a 5 jsou ***členy*** (jednočleny) mnohočlenu. Pojem mnohočlenu lze ilustrovat i na případu více proměnných, kde místo mocnin x jedné proměnné jsou součiny mocnin několika proměnných. Uvedu několik příkladů:

$2x^3y-5xy^2+y+1$; $x^2-3y^2+\sqrt{2}$; x^7-y+z^2; $xy+yz+xz$

Sečítat a odčítat můžeme jen ty členy mnohočlenu, které se liší nanejvýš koeficientem: !

$$\left(x^3+3x^2y+2xy^2+y^3\right)+\left(x+2x^2y-3xy^2\right)=x^3+x+3x^2y+2x^2y+2xy^2-3xy^2+y^3=$$
$$=x^3+x+5x^2y-xy^2+y^3$$

Při násobení mnohočlenů je třeba každý člen jednoho mnohočlenu násobit každým členem druhého mnohočlenu. Při násobení jednotlivých členů se řídíme pravidlem pro násobení mocnin: $a^m . a^n = a^{m+n}$!

Příklad:

$$(2x-3)(3x^2+5x-6)=2x.3x^2+2x.5x+2x.(-6)+(-3).3x^2+(-3).5x+(-3).(-6)=$$
$$=6x^3+10x^2-12x-9x^2-15x+18=6x^3+x^2-27x+18$$

Zvláštním případem násobení mnohočlenů je druhá mocnina dvojčlenu a tak zvaný rozdíl čtverců. Postupujeme podle vzorců:

$$(A+B)^2=A^2+2AB+B^2\,;\qquad (A-B)^2=A^2-2AB+B^2\,;\qquad (A+B)(A-B)=A^2-B^2$$

Proč jsou členy dvojčlenu onačeny velkým písmenem? Protože označují možnost nahrazení velkého písmena dalším mnohočlenem. Tak např. ve vzorci $(A-B)^2=A^2-2AB+B^2$ může být $A = ax + b$ (nebo jakýkoliv jiný mnohočlen) a B = 3 (nebo také další mnohočlen); to znamená, že $(ax+b-3)^2=(ax+b)^2-2(ax+b).3+3^2=a^2x^2+2abx+b^2-6ax-6b+9$!

Příklad:

$$\left(a-\frac{1}{2}\right)^2=a^2-2a\cdot\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2=a^2-a+\frac{1}{4}$$

Při dělení mnohočlenu jednočlenem je třeba každý člen mnohočlenu dělit jednočlenem. Řídíme se při tom pravidlem pro dělení mocnin. $a^m : a^n = a^{m-n}$!

Příklad:

$$\frac{15a^3x^5-10a^4x^4-25a^5x^3}{5a^3x^3}=\frac{15a^3x^5}{5a^3x^3}-\frac{10a^4x^4}{5a^3x^3}-\frac{25a^5x^3}{5a^3x^3}=\quad 3x^2-2ax-5a^2$$

Všimněte si, že zápis dělení ve tvaru zlomků je daleko přehlednější než zápis ve tvaru klasického dělení.

$(15a^3x^5-10a^4x^4-25a^5x^3)$: $5a^3x^3 = 15a^3x^5 : 5a^3x^3 - 10a^4x^4 : 5a^3x^3 - 25a^5x^3 : 5a^3x^3 =$
$=3x^2-2ax-5a^2$

Příklady

a) $(7a-3b+2)+(4b-2a-1)=$ $\qquad$ $5a+b+1$

b) $(-2k+8c-1)+(2-5c)+(9k-3+4c)=$ $\qquad$ $7k+7c-2$

c) $(5m^2-4am+2a^2)+(3{,}5a^2+6am-2m^2)=$ $\qquad$ $3m^2+2am+5{,}5a^2$

d) $\left(\frac{2}{5}t+\frac{1}{3}r-2\right)+\left(5-\frac{5}{6}r+0,7t\right)=$ $\qquad 1,1t-\frac{1}{2}r+3$

e) $a^2+\left(b^2-c^2\right)+b^2-\left(a^2+c^2\right)-c^2-\left(a^2-c^2\right)=$ $\qquad -a^2+2b^2-2c^2$

f) $(a-b)-(b+c-d)+(b+c-d)+(2b-a)=$ $\qquad b$

g) $3.\left(2r^2-6r+0,2\right)-2.\left(0,5r^2+2r-1,7\right)=$ $\qquad 5r^2-22r+4$

h) $(5d-2)^2+(4+2d)^2+\left(2d-3d^2\right).2=$ $\qquad 23d^2+20$

i) Určete výraz, který musíme přičíst k výrazu $\left(5n-20+\frac{2}{3}p\right)$, abychom dostali výraz $\left(7,4n+30-\frac{1}{2}p\right)$. $\qquad 2,4n+50-\frac{7}{6}p$

j) Určete výraz, který musíme odečíst od výrazu $\left(\frac{2}{5}k^2-2k+0,6\right)$, abychom dostali výraz $\left(0,3k^2+0,5k-6,3\right)$. $\qquad 0,1k^2-2,5k+6,9$

k) $(-3ab)\left(4a^2b-2ab^2+7ab-5a^2\right)=$ $\qquad -12a^3b^2+6a^2b^3-21a^2b^2+15a^3b$

l) $\left(1,4z^2-2z+0,3\right).\left(-4z^2\right)=$ $\qquad -5,6z^4+8z^3-1,2z^2$

m) $(11j-3)(0,9-4j)=$ $\qquad -44j^2+21,9j-2,7$

n) $(7b-2y)(5y-3b)=$ $\qquad -21b^2+41by-10y^2$

o) $(-x+2y)^2=$ $\qquad x^2-4xy+4y^2$

p) $(10-2a)^2=$ $\qquad 100-40a+4a^2$

q) $(-3b-2)^2=$ $\qquad$ POZOR! To je jako $\left[(-1)(3b+2)\right]^2=(-1)^2(3b+2)^2=9b^2+12b+4$

anebo: $(-3b)^2-2(-3b).2+(-2)^2=9b^2+12b+4$

r) $(y-0,1)^2=$ $\qquad y^2-0,2y+0,01$

Rozklad mnohočlenů na součin:
Jde o vyjádření mnohočlenu ve tvaru součinu několika mnohočlenů např. z důvodu krácení v lomeném výrazu. Provádí se nejčastěji pomocí tzv. vytýkání nebo použitím vhodných vzorců.

Vytýkání: Je založeno na distributivním zákonu $A.C+B.C=C.(A+B)$ V konkrétních případech bývá největším problémem poznat společného dělitele jednotlivých členů.

Příklad:

$15m^2-6m=3m(5m-2)$

$6x^2y^3-8x^4yz=2x^2y.3y^2-2x^2y.4x^2z=2x^2y\left(3y^2-4x^2z\right)$

Použití vzorců:

$$A^2+2AB+B^2=(A+B)^2;\qquad A^2-2AB+B^2=(A-B)^2;\qquad A^2-B^2=(A+B)(A-B)$$

Při rozkladu na součin lze často použít výše uvedených vzorců pro druhé mocniny dvojčlenu.
Příklad:

$$2xy^2-20xy+50x=2x\left(y^2-10y+25\right)=2x(y-5)^2$$

$$a^2-6a+9-b^2=(a-3)^2-b^2=(a-3+b)(a-3-b)$$ (rozdíl čtverců)

Pozor**:** častým omylem je pokus vytvořit i vzoreček pro rozklad součtu čtverců. Tento dvojčlen nelze v množině reálných čísel rozložit. Součet čtverců lze rozložit na součin pouze v oboru komplexních čísel, který se na ZŠ nevyučuje.

Často vede k cíli i postupné vytýkání, např.:

$$(3ac-7a)-(7-3c)=3ac+3c-7a-7=3c(a+1)-7(a+1)=(a+1)(3c-7)$$

Někdy vede k cíli ***doplnění výrazu na druhou mocninu*** nějakého dvojčlenu se současným odečtením doplňku a následným použitím vzorce pro rozdíl čtverců – viz příklad:
Výraz x^2-6x+5 nelze vytknutím změnit v součin a výraz nelze ani rozložit podle vzorce. Zkusíme doplnit na druhou mocninu dvojčlenu $(x-3)$ a to, co jsme doplnili vzápětí odečíst.

$$x^2-6x+(5+4)-4=x^2-6x+9-4=(x-3)^2-2^2=(x-3+2)(x-3-2)=(x-1)(x-5)$$

Z příkladu jasně vyplývá, že tato cesta vede k cíli jen tehdy, je-li doplněk druhou mocninou.

Příklady

1. $4x-6=$	$2(2x-3)$
2. $8xy-12y^2=$	$4y(2x-3y)$
3. $-6z^2-9z-12zy=$	$(-3z)(2z+3+4y)$
4. $3-v-(v-3)=$	$2(3-v)$
5. $5(t-2)+2-t=$	$4(t-2)$
6. $ax-bx-a+b=$	$(x-1)(a-b)$
7. $r^3-r^2+r-1=$	$(r-1)(r^2+1)$
8. $(3a+y)^2-c^2=$	$(3a+y-c)(3a+y+c)$
9. $5y^4-40y^3+80y^2=$	$5y^2(y-4)^2$
10. $3k(2s-u)+u-2a=$	$(2s-u)(3k-1)$
11. $8-s+a^2b(s-8)=$	$(a-8)(a^2b-1)$
12. $(2m-1)3t-4(2m-1)=$	$(2m-1)(3t-4)$
13. $(4a^2-b)(-3v)-2(b-4a^2)=$	$(4a^2-b)(2-3v)$
14. $2nz+ky+kz+2ny=$	$(z-y)(2n+k)$
15. $3ac+2d-3ad-2c=$	$(3a-2)(c-d)$
16. $50k^2-32p^2=$	$2(5k-4p)(5k+4p)$
17. $5d^2-5d+1{,}25=$	$5(d-0{,}5)^2$

Lomený výraz

Lomeným výrazem nazýváme výraz, který lze zapsat ve tvaru podílu dvou mnohočlenů. Používáme stejné termíny jako u čísel a zlomků – čitatel, jmenovatel, nejmenší společný násobek a dělitel, společný jmenovatel apod. Lomené výrazy můžeme podobně jako zlomky rozšiřovat, krátit, sečítat, odčítat, násobit, dělit a umocňovat podle stejných pravidel jako zlomky. Vždy však uvádíme, kdy mají dané výrazy smysl.

Příklad:

$$\frac{4x^2-16x+16}{6x^2-24}=\frac{4\left(x^2-4x+4\right)}{6\left(x^2-4\right)}=\frac{4(x-2)^2}{6(x-2)(x+2)}=$$

$$=\frac{2(x-2)}{3(x+2)} \quad x\neq\pm 2$$

/vložená poznámka: 4 proti 6 lze krátit bez problémů. $x-2$ v čitateli proti $x-2$ ve jmenovateli však pouze za předpokladu, že se $x-2$ nerovná 0 a tedy že $x\neq 2$! Proč? Protože nulou nelze dělit! /

Příklady

1. $\frac{k^2+k}{k+1}=$ — k; $k\neq -1$
2. $\frac{3s-9}{s^2-3}=$ — $\frac{s}{s+3}$; $s\neq\pm 3$
3. $\frac{a^2-2a+1}{4a-4}=$ — $\frac{a-1}{4}$; $a\neq 1$
4. $\frac{m-1}{1-m}=$ — $-1; m\neq 1$
5. $\frac{t^2-25}{5-t}=$ — $-(t+5)$; $t\neq 5$
6. $\frac{8b+4u}{4b^2+4bu+u^2}=$ — $\frac{4}{2b+u}$; $b\neq -\frac{u}{2}$

Sečítání a odčítání lomených výrazů

Příklad

Sečtěme výrazy $\frac{x+2}{x-2}+\frac{2-x}{x+2}$ Nejprve posoudíme obor, ve kterém mají oba výrazy smysl. Daný výraz má smysl pro $x\neq\pm 2$. Jmenovatelé nejdou rozložit na součin a nemají společné dělitele – společným jmenovatelem bude tedy jejich součin.

$$\frac{x+2}{x-2}+\frac{2-x}{x+2}=\frac{(x+2)^2+(-1)(x-2)^2}{(x-2)(x+2)}=\frac{x^2+4x+4-\left(x^2-4x+4\right)}{(x-2)(x+2)}=\frac{8x}{x^2-4} \quad \text{nebo}$$

$$\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}-\frac{2x}{1-x^2}=\frac{1-x+1+x-2x}{1-x^2}=\frac{2-2x}{1-x^2}=\frac{2(1-x)}{(1-x)(1+x)}=\frac{2}{1+x} \quad x\neq\pm 1$$

což je nejenom podmínka smyslu výrazů, ale také podmínka krácení výrazem $1-x$

Příklady

a. $\dfrac{7}{a+b}+\dfrac{6}{3a+3b}=$ $\dfrac{9}{a+b};\quad a\neq -b$

b. $\dfrac{5a}{(a-1)(a+1)}+\dfrac{7a-3}{a^2-1}=$ $\dfrac{12a-3}{a^2-1};\quad a\neq \pm 1$

c. $\dfrac{5z^2-11}{4z^2-9}-\dfrac{z^2-2}{(2z-3)(3+2z)}=$ $1;\quad z\neq \pm\dfrac{3}{2}$

d. $\dfrac{7}{x}-\dfrac{3}{2x-y}=$ $\dfrac{11x-7y}{x(2x-y)};\quad x\neq 0,\quad y\neq 2x$

e. $\dfrac{2t+u}{u}-\dfrac{u+2t}{2t+u}=$ $\dfrac{2t}{u};\quad u\neq 0,\quad t\neq -\dfrac{u}{2}$

f. $\dfrac{2b+v-1}{3v}-\dfrac{v-1}{5v}=$ $\dfrac{2(5b+v-1)}{15v};\quad v\neq 0$

g. $\dfrac{k-7}{k-3}-\dfrac{k}{k+3}+\dfrac{2k}{k^2-9}=$ $\dfrac{k-21}{k^2-9};\quad k\neq \pm 3$

h. $\dfrac{1+m}{2}+\dfrac{(m-1)^2}{4m}=$ $\dfrac{3m^2+1}{4m};\quad m\neq 0$

i. $a-\dfrac{a^2-b^2}{a}=$ $\dfrac{b^2}{a};\quad a\neq 0$

j. $a+b-\dfrac{a^2-b^2}{a}=$ $\dfrac{b(a+b)}{a};\quad a\neq 0$

k. $\dfrac{2x-y}{x^2+xy}-\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+y}=$ $\dfrac{-2y}{x^2+xy};\quad x\neq 0,\quad y\neq -x$

l. $\dfrac{2x}{x+y}+\dfrac{3y}{x-y}-\dfrac{2x^2+3y^2}{x^2-y^2}=$ $\dfrac{xy}{x^2-y^2};\quad x\neq \pm y$

m. $\dfrac{5}{2x^2+6x}-\dfrac{4-3x^2}{x^2-9}-3=$ $\dfrac{51x-15}{2x(x^2-9)};\quad x\neq 0,\quad x\neq \pm 3$

n. $\dfrac{2a-1}{2a}-\dfrac{2a}{2a-1}-\dfrac{1}{2a-4a^2}=$ $-\dfrac{1}{a};\quad a\neq 0,\quad a\neq \dfrac{1}{2}$

o. $\dfrac{1}{6x-4y}-\dfrac{1}{6x+4y}-\dfrac{3x}{4y^2-9x^2}=$ $\dfrac{1}{3x-2y};\quad x\neq \dfrac{2y}{3}$

Násobení a dělení lomených výrazů

Lomené výrazy násobíme stejným způsobem jako zlomky. Dva lomené výrazy násobíme tak, že násobíme mezi sebou čitatele a do jmenovatele výsledku zapíšeme výsledek násobení jmenovatelů. Při násobení s výhodou krátíme čitatele proti jmenovateli. Sledujeme a vyhodnocujeme kdy má daný výraz smysl. !

Příklad

$$\left(1-\frac{x^2}{y^2}\right)\cdot\left(\frac{x^2}{y^2-x^2}+1\right)=\frac{y^2-x^2}{y^2}\cdot\frac{x^2+y^2-x^2}{y^2-x^2}=\frac{y^2-x^2}{y^2}\cdot\frac{y^2}{y^2-x^2}=1 \quad x\neq y,\quad y\neq 0$$

Dělení lomených výrazu je vlastně jenom podmnožinou násobení, protože dva lomené výrazy dělíme tak, jako zlomky – to znamená, že první zlomek násobíme převrácenou hodnotou zlomku druhého. Trochu to může komplikovat zápis, kdy se někdy používá pro operátor dělení další zlomková čára. V postupu se však nic nemění – stačí si uvědomit, že zlomková čára označuje dělení. !

Příklad

$$\frac{c+d}{c-d}:\frac{c^2+cd}{2c^2-2d^2}=\frac{c+d}{c-d}\cdot\frac{2c^2-2d^2}{c^2+cd}=\frac{c+d}{c-d}\cdot\frac{2(c+d)(c-d)}{c(c+d)}=\frac{2(c+d)}{c},\quad c\neq\pm d,\quad c\neq 0$$

$$\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{2x}}{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{2x^2}}=\frac{\frac{2-1}{2x}}{\frac{2-1}{2x^2}}=\frac{1}{2x}:\frac{1}{2x^2}=\frac{1}{2x}\cdot\frac{2x^2}{1}=x,\quad x\neq 0$$

Příklady

1) $7v\cdot\frac{2v}{z}=$ $\qquad\frac{14v^2}{z};\quad z\neq 0$

2) $\frac{3a-5}{2}\cdot(3a+5)=$ $\qquad\frac{9a^2-25}{2}$

3) $\frac{2d-1}{6}\cdot\frac{3c}{c-d}=$ $\qquad\frac{c(2d-1)}{2(c-d)};\quad c\neq d$

4) $\frac{m^2-2m+1}{5m}\cdot\frac{3m}{m-1}=$ $\qquad\frac{3(m-1)}{5};\quad m\neq 0,\quad m\neq 1$

5) $\frac{t^2-2ta+a^2}{3t}\cdot\frac{9a}{2(t-a)}=$ $\qquad\frac{3a(t-a)}{2t};\quad t\neq 0,\quad t\neq a$

6) $\frac{x^2+4ax+4a^2}{x+2a}\cdot\frac{x-1}{x^2-2x+1}=$ $\qquad\frac{x+2a}{x-1};\quad x\neq -2a,\quad x\neq 1$

7) $\frac{c^2+2cd+d^2}{2d}\cdot\frac{c-d}{c+d}=$ $\qquad\frac{c^2-d^2}{2d};\quad d\neq 0,\quad c\neq -d$

8) $\left(3n-\frac{3n}{n+1}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3n^2}\right)=$ $\qquad\frac{3n^2-1}{n+1};\quad n\neq 0,\quad n\neq -1$

9) $\frac{a+6}{7a+6}\cdot\left(\frac{a+3}{a+6}-\frac{a-2}{a-6}\right)=$ $\qquad\frac{1}{6-a};\quad a\neq -\frac{6}{7},\quad a\neq\pm 6$

a) $\dfrac{2s-10}{s^2-4s+4}:\dfrac{s-5}{s-2}=$ $\qquad$ $\dfrac{2}{s-2};\quad s\neq 2,\quad s\neq 5$

b) $\dfrac{3^2}{8v}:36=$ $\qquad$ $\dfrac{1}{32v};\quad v\neq 0$

c) $\left(\dfrac{x^2}{4}-y^2\right):\dfrac{x+2y}{12}=$ $\qquad$ $3(x-2y);\quad x\neq -2y$

d) $\left(\dfrac{x^2}{y^2-x^2}+1\right):\left(1-\dfrac{x}{x-y}\right)=$ $\qquad$ $\dfrac{y}{y+x};\quad y\neq 0,\quad y\neq \pm x$

e) $\dfrac{a-b}{a+b}:\left(1-\dfrac{a}{b}\right)=$ $\qquad$ $-\dfrac{b}{a+b};\quad a\neq \pm b,\quad b\neq 0$

f) $\left(\dfrac{1}{1-a}-1\right):\left(\dfrac{2a^2}{1-a}-a\right)=$ $\qquad$ $\dfrac{1}{3a-1};\quad a\neq 1,\quad a\neq 0,\quad a\neq \dfrac{1}{3}$

g) $\left(\dfrac{k}{k-1}+1\right):\left(1-\dfrac{3k^2}{1-k^2}\right)=$ $\qquad$ $\dfrac{k+1}{2k+1};\quad k\neq \pm 1,\quad k\neq \pm\dfrac{1}{2}$

h) $\left(m+1+\dfrac{1}{m-1}\right):\left(1+\dfrac{1}{m^2-1}\right)=$ $\qquad$ $m+1;\quad m\neq \pm 1,\quad m\neq 0$

i) $\left(\dfrac{x}{x-a}-\dfrac{a}{x+a}\right):\left(\dfrac{x+a}{a}-\dfrac{x-a}{x}\right)=$ $\qquad$ $\dfrac{ax}{x^2-a^2};\quad x\neq \pm a,\quad x\neq 0,\quad a\neq 0$

j) $\dfrac{\dfrac{1}{2r^3}}{3s^2}=$ $\qquad$ $\dfrac{1}{6r^3s^2};\quad r\neq 0,\quad s\neq 0$

k) $\dfrac{1+\dfrac{y^2}{x^2}}{1-\dfrac{y^2}{x^2}}=$ $\qquad$ $\dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2};\quad x\neq \pm y,\quad x\neq 0$

Zpracoval: Leopold Kyslinger

Použité prameny:
Algebraické výrazy — doc. PaedDr. Dalibor Martišek, Ph.D
Sbírka úloh z matematiky pro ZŠ — PaedDr. František Běloun a kolektiv